ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM NGỌC SƠN

PHƯƠNG PHÁP SỐ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC CÁC PHIẾM HÀM TÍCH PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Vũ Vinh Quang

THÁI NGUYÊN - 2021

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của **TS Vũ Vinh Quang** và **TS. Đàm Thanh Phương**. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành tới thầy giáo hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt những vấn đề nghiên cứu, dành nhiều tâm huyết, thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn này.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và nghiên cứu. Đồng thời, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán học (khóa 2018-2020), cảm ơn gia đình, bạn bè và cơ quan chủ quản đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập tại đây.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 11 năm 2020.

Học viên

Phạm Ngọc Sơn

Mở đầu

Trong các dạng phương trình vi phân phi tuyến bậc cao thì phương trình vi phân tuyến tính bậc 4 là một lớp phương trình được nhiều tác giả quan tâm do tính ứng dụng cao của lớp phương trình này. Tại Việt Nam trong các năm gần đây có thể kể đến các kết quả của nhóm tác giả: Đặng Quang Á, Nguyễn Thanh Hường, Ngô Thị Kim Quy. Dạng phương trình phi tuyến tổng quát nhất được xét là dạng

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) = f(x, u, u', u'', u'''), \quad a < x < b, \\ a_0u(a) - a_1u'(a) = A, \quad b_0u(b) + b_1u'(b) = B \\ c_0u''(a) - c_1u'''(a) = C, \quad d_0u''(b) + d_1u'''(b) = D. \end{cases} \tag{1}$$

Bằng cách đặt $v(x) = u''(x), \varphi = f(x, u, u', u'', u''')$. Khi đó, bài toán (1) được đưa về hai bài toán cấp hai:

$$\begin{cases} v''(x) = \varphi, \quad a < x < b, \\ c_0v(a) - c_1v'(a) = C, \\ d_0v(b) + d_1v'(b) = D, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u''(x) = v(x), \quad a < x < b, \\ a_0u(a) - a_1u'(a) = A, \\ b_0u(b) + b_1u'(b) = B. \end{cases} \tag{3}$$

Khi đó, nghiệm số của bài toán (1) được xác định từ phương pháp lặp sau đây.

Bước 1: Xuất phát từ $\varphi_0 = f(x, 0, 0, 0, 0)$.

Bước 2: Với mọi $k = 0, 1, 2, \ldots$, giải liên tiếp hai bài toán cấp hai

$$\begin{cases} v_k'' = \varphi_k, a \le x < b, \\ c_0 v_k(a) - v_1 v_k'(a) = C, \\ d_0 v_k(b) + d_1 v_k'(b) = D, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_k'' = v_k, a < x < b, \\ a_0 u_k(a) - a_1 u_k'(a) = A, \\ b_0 u_k(b) + b_1 u_k'(b) = B. \end{cases}$$

Hiệu chỉnh $\varphi_{k+1} = f(x, u_k, u_k', v_k, v_k')$.

Về mặt lý thuyết, sự hội tụ của sơ đồ lặp trên đã được chứng minh bằng lý thuyết của phương trình toán tử. Việc giải số các bài toán cấp hai đã thực hiện bằng việc xây dựng các lược đồ sai phân với độ chính xác cấp 4 cho bài toán cấp hai

$$\begin{cases} u''(x) = f(x),\ a < x < b, \\ \alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = A, \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B. \end{cases} \tag{4}$$

Các kết quả đã được công bố trong [3].

Trong các công trình gần đây, một số tác giả trên thế giới đã đề cập tới các mô hình bài toán cơ học có sự phụ thuộc tích phân. Cụ thể, trong [7], các tác giả: N.Kachakhidze, N.Khomeriki, J.Peradze, Z.Tsiklauri đã nghiên cứu mô hình bài toán được mô hình hóa bởi phương trình phi tuyến cấp hai

$$\begin{cases} \varphi\left(\int_0^1 (w'')^2 dx\right) w'' = f(x), 0 < x < 1, \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Trong [8], các tác giả Quang A. Dang, Vu Thai Luan đã nghiên cứu mô hình bài toán cấp bốn phi tuyến dạng

$$\begin{cases} y^{(4)} - \varepsilon y'' - \dfrac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi (y')^2 dx\right) y'' = p(x), 0 < x < 1, \\ y(0) = y(\pi) = 0, y''(0) = y''(\pi) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Trong [9], các tác giả T.F Ma đã xét dạng bài toán biên phi tuyến cấp 4 dạng

$$\begin{cases} u^{(4)} - M\left(\int_0^L |u'(s)|^2 ds\right) u''(x) = f(x, u, u'), \\ u(0) = A, \quad u(L) = B; \\ u''(0) = C, \quad u''(L) = g(u'(L)). \end{cases} \tag{7}$$

Có thể thấy rằng điểm chung của các mô hình bài toán (5), (6), (7) mà các tác giả đã nghiên cứu là luôn có thành các hệ số của phương trình phụ thuộc tích phân của hàm cần tìm. Để nghiên cứu các bài toán này, chúng ta có thể sử dụng các phương pháp biến đổi (Phép chia hoặc phép chuyển vế) để chuyển các thành phần phụ thuộc tích phân sang vế phải của phương trình chuyển các bài toán đang xét về dạng bài toán (1). Khi đó có thể nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp lặp bằng các phương trình toán tử và việc tính toán số sử dụng các lược đồ sai phân với độ chính xác bậc bốn của dạng bài toán (4). Hiển nhiên khi thực hiện phép biến đổi, thành phần vế phải sẽ trở nên phức tạp hơn vì sẽ chứa thêm thành phần hàm $f(x)$.

Một cách tự nhiên, chúng ta cần nghiên cứu phương pháp giải các bài toán trên mà không cần chuyển các thành phần chứa tích phân sang vế phải. Khi đó cần nghiên cứu hai vấn đề sau:

1. Nghiên cứu xây dựng phương pháp lặp tổng quát cho mô hình các bài toán có hệ số phương trình chứa thành phần tích phân của đạo hàm hàm cần tìm.

2. Xây dựng lược đồ sai phân với độ chính xác cấp 4 cho bài toán cấp hai dạng tổng quát hơn.

Nội dung chính của luận văn trình bày một số kết quả khi nghiên cứu mô hình của bài toán vi phân với hệ số phụ thuộc các phiếm hàm tích phân bao gồm nghiên cứu mô hình tổng quát, xây dựng lược đồ sai phân bậc cao để giải số bài toán cấp hai, xây dựng lược đồ lặp giải các phương trình vi phân bậc cao có các hệ số phụ thuộc các phiếm hàm dạng tích phân. Thực hiện các thực nghiệm số trên các lược đồ sai phân bậc cao khẳng định tính hữu hiệu của các sơ đồ lặp đã đề xuất trên phần mềm `MATLAB`. Luận văn có bố cục như sau

- *Chương 1:* Đưa ra một số kiến thức cơ bản về các không gian hàm như không gian Metric, không gian tuyến tính định chuẩn nguyên lý ánh xạ co, điều kiện Lipchitz. Các điều kiện hội tụ của dãy số. Một số phương pháp giải phương trình đại số phi tuyến dựa trên các phương pháp lặp như phương pháp chia đôi, phương pháp dây cung, phương pháp tuyến. Lược đồ sai phân với độ chính xác bậc cao và thuật toán giải phương trình vi phân với hệ điều kiện đầu với độ chính xác bậc bốn.

- *Chương 2:* Trình bày mô hình bài toán biên phi tuyến với hệ số phụ thuộc các phiếm hàm tích phân, phương pháp tìm nghiệm đúng của bài toán. Một số phương pháp lặp tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán bằng các phương pháp lặp đối với bài toán cấp hai và bài toán cấp bốn.

- *Chương 3:* Đưa ra một số kết quả thực nghiệm trên máy tính điện tử thông qua các ví dụ cụ thể.

Các kết quả thực nghiệm trong luận văn được thực hiện bằng các chương trình viết trên nền ngôn ngữ `MATLAB` chạy trên máy tính.

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

Nội dung chính của Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về các không gian hàm, các điều kiện hội tụ của dãy số, các phương pháp lặp giải phương trình phi tuyến tính. Kết quả xây dựng thuật toán giải gần đúng bài toán cấp hai với hệ điều kiện biên dựa trên lược đồ sai phân với độ chính xác cấp 4. Các kết quả này đã được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 3].

1.1 Một số không gian các hàm [1]

Định nghĩa 1.1. *Cho X là một tập khác rỗng. Trên X ta trang bị một hàm số*

$$\begin{aligned} \rho : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \rho(x, y), \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau

1) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$*;* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$*;*

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \forall x, y, z \in X$*.*

Khi đó, ρ được gọi là một mêtric hay khoảng cách trên X và cặp (X, ρ) gọi là một không gian mêtric (đôi khi chỉ kí hiệu là X). Mỗi phần tử của X

sẽ được gọi là một điểm, $\rho(x, y)$ gọi là khoảng cách giữa hai x và y điểm trên X.

Nguyên lý ánh xạ co

Định nghĩa 1.2 ([1]). *Cho (X, d) là một không gian metric. Ánh xạ $f : X \to X$ được gọi là một ánh xạ co trên X nếu và chỉ nếu tồn tại $q \in [0, 1)$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x, y),$$

trong đó, q được gọi là hệ số co.

Dễ thấy mọi ánh xạ co đều liên tục.

Định lý 1.3 (Nguyên lý ánh xạ co Banach, [1]). *Cho f là ánh xạ co trong không gian mêtric đủ (X, d). Khi đó,*

(a) Tồn tại duy nhất $x^* \in X$ sao cho $f(x^*) = x^*$. Phần tử x^* được gọi là điểm bất động của ánh xạ f.

(b) Mọi dãy lặp $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$ xuất phát từ x_0 bất kỳ đều hội tụ. Ngoài ra, ta có các ước lượng sau

$$\begin{aligned} d(x_n, x^*) &\leq q^n(1-q)^{-1}d(x_0, x_1), n \geq 1 \\ d(x_n, x^*) &\leq q(1-q)^{-1}d(x_{n-1}, x_n), n \geq 1. \end{aligned}$$

1.1.1 Không gian tuyến tuyến tính định chuẩn

Định nghĩa 1.4. *Cho X là một không gian tuyến tính, ta đưa vào ánh xạ ký hiệu là chuẩn X $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện*

a. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

b. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,